5. UČENIK UME DA IZRAČUNA POVRŠINU I ZAPREMINU VALJKA, KUPE I LOPTE U SLUČAJEVIMA KAD NEOPHODNI ELEMENTI NISU NEPOSREDNO DATI

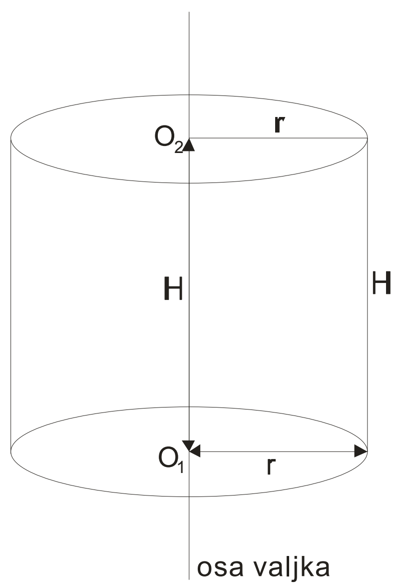
VALJAK

Valjak je geometrijsko telo ograničeno sa dva kruga u paralelnim ravnima i delom cilindrične površi čije su izvodnice normalne na ravan tih krugova.

Osa valjka je prava koja prolazi kroz centre baza.

Naravno kao i do sada oznake su:

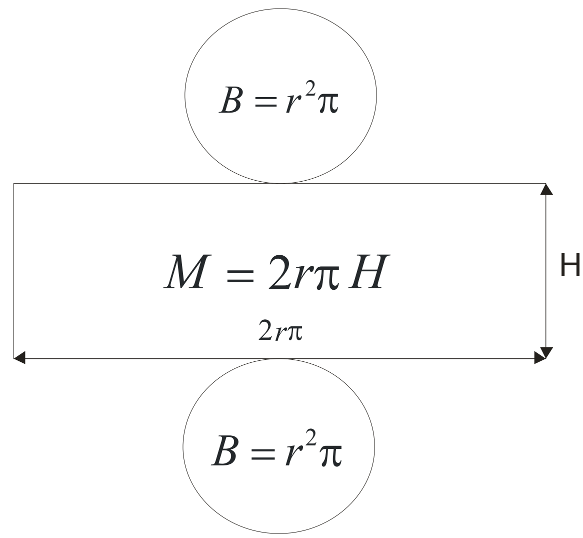
- **P je površina valjka**
- **V je zapremina valjka**
- **B je površina baze**
- **M je površina omotača**
- **H je visina valjka**
- **r je poluprečnik osnove (baze), onda je 2r prečnik**



Početne formule za površinu i zapreminu valjka iste su kao i formule za P i V prizme:

$$P = 2B + M \qquad \text{i} \qquad V = B \cdot H$$

Pre nego li sklopimo formule za P i V pogledajmo mrežu valjka:



Baze su očigledno krugovi čija je površina :

$$B = r^2\pi .$$

Omotač je pravougaonik čije su stranice visina H i obim kruga $O = 2r\pi$ **, pa je površina omotača jednaka**

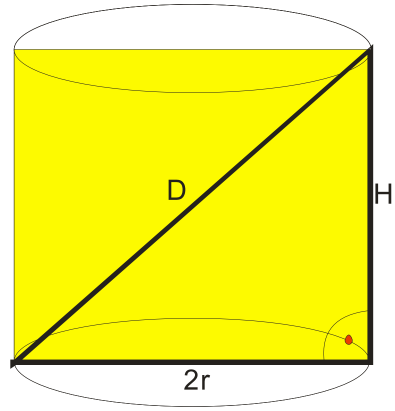
$$M = 2r\pi H$$

$$P = 2B + M \qquad V = B \cdot H$$

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi H \qquad V = r^2\pi H$$

$$P = 2r\pi(r + H)$$

Pogledajmo sada kako izgleda osni presek valjka:



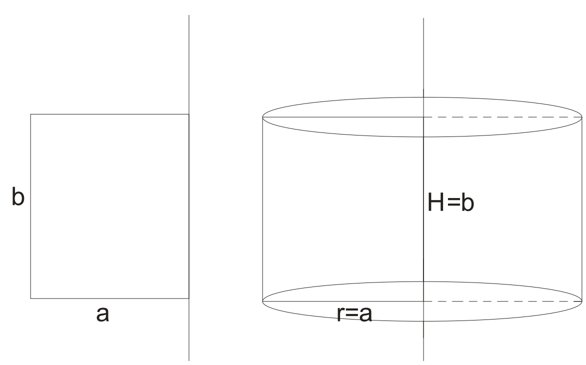
osni presek

Ovde primenjujemo Pitagorinu teoremu: $D^2 = (2r)^2 + H^2$

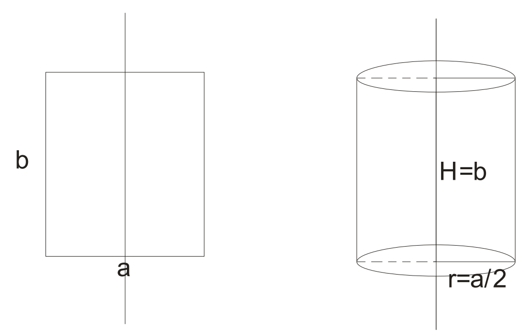
Površina osnog preseka je $P_{op} = 2rH$

Ako u tekstu zadatka kaže da je valjak **RAVNOSTRAN**, to znači da mu je osni presek kvadrat i da je $H = 2r$

Napomenimo još da valjak može nastati obrtanjem kvadrata ili pravougaonika oko jedne stranice ili simetrale stranice.



osa rotacije(stranica)

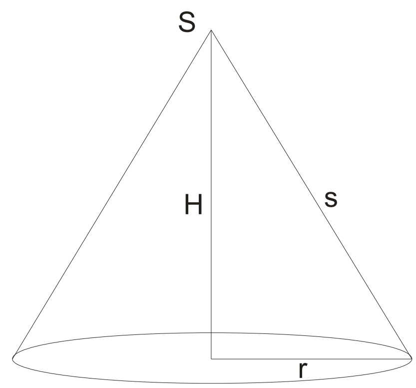


osa rotacije (simetrala stranice)

www.matematiranje.in.rs

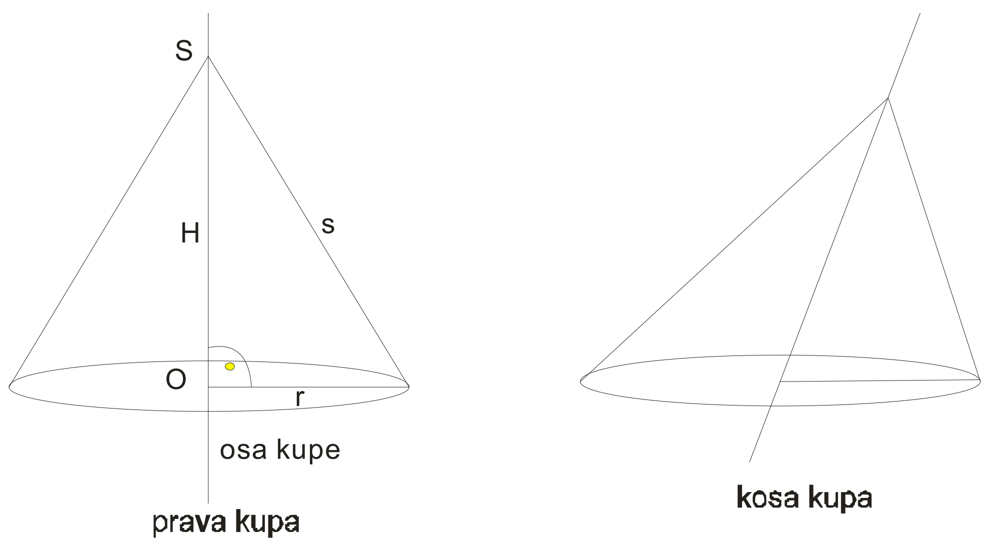
KUPA

Kupa je oblo feometrijsko telo čija je osnova krug, a omotač je deo obrtne konusne površi sa vrhom u tački S.



Osa kupe je prava koja prolazi kroz vrh kupe i centar osnove kupe . Ako je osa normalna na osnovu kupe reč je o

pravoj kupi, inače se radi o kosoj kupi.



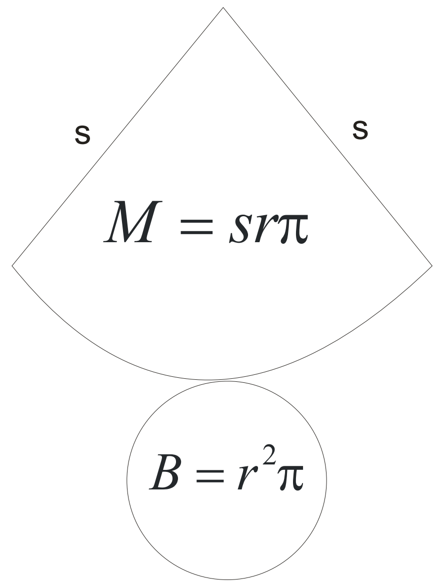
Obeležavanje:

- **r** je poluprečnik osnove(2r je prečnik osnove)
- **H** je visina kupe
- **s** je izvodnica kupe
- **B** je baza (osnova)
- **M** je omotač
- **P** površina, **V** zapremina

Opšte početne formule za površinu i zapreminu kupe iste su kao i formule za P i V piramide.

$$P = B + M \qquad \text{i} \qquad V = \frac{1}{3} B \cdot H$$

Pogledajmo najpre **mrežu** kupe.

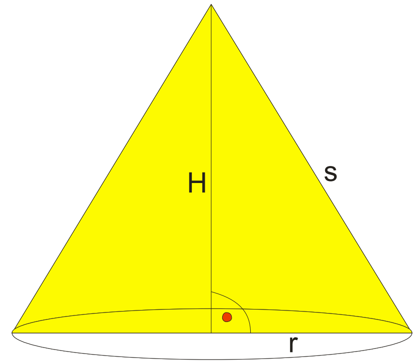


$$P = B + M \qquad\qquad V = \frac{1}{3} BH$$

$$P = r^2\pi + sr\pi \qquad\qquad V = \frac{1}{3} r^2 \pi H$$

$$P = r\pi(r + s)$$

Pogledajmo i osni presek:



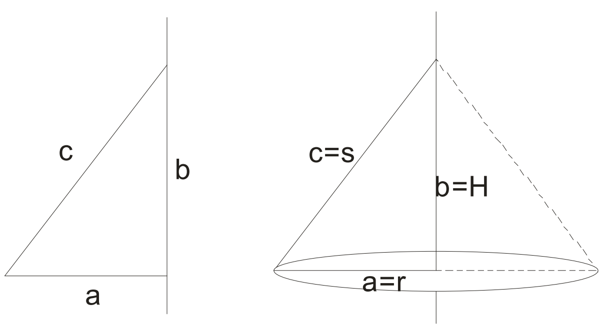
osni presek

Osni presek je trougao , čija je površina: $P_{op} = \dfrac{2r \cdot H}{2}$ to jest $P_{op} = r \cdot H$

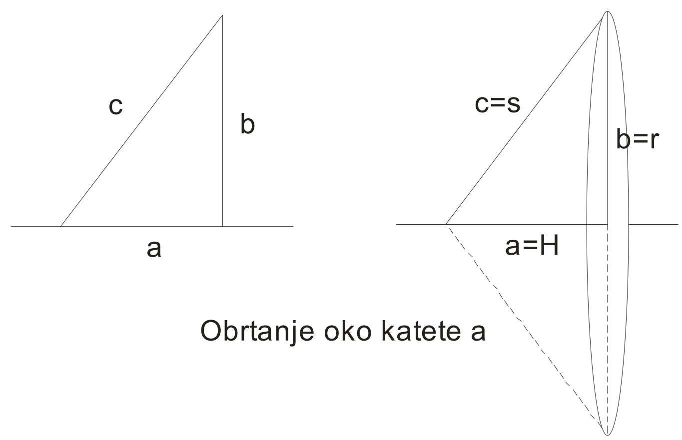
Još trebamo paziti da ako u tekstu zadatka kaže da se radi o **ravnostranoj kupi** , onda je osni presek

jednakostranični trougao i važi da je : $2r = s$

Znajte da kupa može nastati i obrtanjem pravouglog trougla oko jedne od svojih kateta:



Obrtanje oko katete b



Obrtanje oko katete a

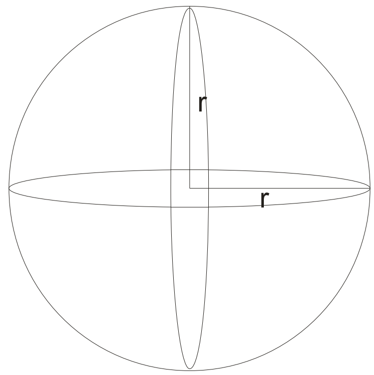
www.matematiranje.in.rs

SFERA (LOPTA)

Sfera je skup svih tačaka prostora podjednako udaljenih od jedne fiksirane tačke(centra sfere).

Poluprečnik sfere(r) je rastojanje bilo koje tačke sfere od centra sfere.

Lopta je oblo telo ograničeno sferom.

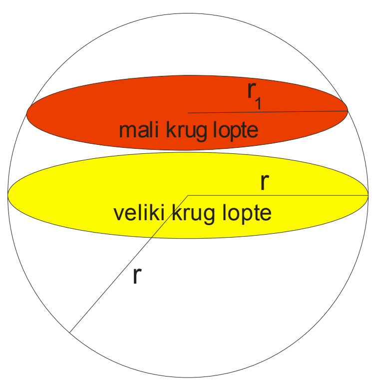


$P = 4r^2\pi$ je formula za površinu lopte

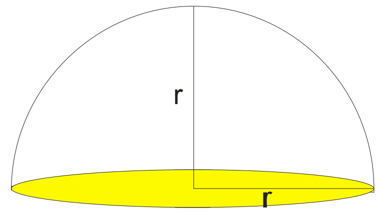
$V = \frac{4}{3}r^3\pi$ je formula za zapreminu lopte

Lopta nastaje obrtanjem kruga oko bilo kog njegovog prečnika.

Presek lopte i bilo koje ravni je krug. Ako presečna ravan prolazi kroz centar dobija se **veliki krug** lopte, to jest krug koji ima najveću površinu.



Ako nam je zadata **polulopta:**



Njenu zapreminu ćemo izračunati lako, tako što zapreminu lopte podelimo sa 2.

$$\mathrm{V}_{polulopte}=\frac{1}{2}\frac{4}{3}\mathrm{r}^3\pi=\frac{2}{3}\mathrm{r}^3\pi$$

Al kod površine moramo biti pažljivi , jer se ona sastoji od polovine površine lopte i površine velikog kruga lopte:

$$P_{polulopte}=\frac{1}{2}P_{lopte}+P_{velikikrug}$$

$$P_{polulopte}=\frac{1}{2}\cdot 4r^2\pi+r^2\pi$$

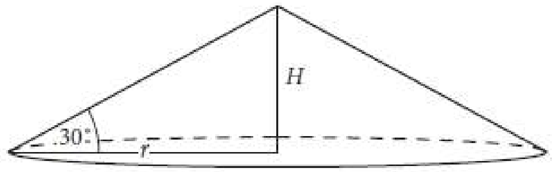
$$P_{polulopte}=2r^2\pi+r^2\pi$$

$$P_{polulopte}=3r^2\pi$$

www.matematiranje.in.rs

Evo nekoliko primera iz zbirke za pripremu male mature 2012. godine.

291. Изводница купе чија је површина основе 108π cm² са полупречником основе гради угао од 30°. Колико је пута запремина те купе већа од запремине лопте полупречника 3 cm? Прикажи поступак.



Запремина купе је ___ пута већа од запремине лопте.

Rešenje:

Iz površine osnove kupe ćemo naći dužinu poluprečnika:

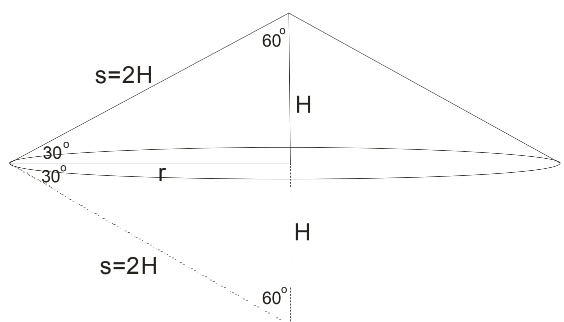
$$B = r^2\pi$$

$$108\cancel{\pi} = r^2\cancel{\pi}$$

$$r^2 = 108$$

$$r = \sqrt{108} = \sqrt{36\cdot 3} = 6\sqrt{3}cm$$

$$\boxed{r = 6\sqrt{3}cm}$$



Vršimo dopunu do jednakostraničnog trouga. Visina tog trougla je r , a stranica tog trougla je 2H.

$$h_\triangle = \frac{a_\triangle\sqrt{3}}{2}$$

$$6\cancel{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{2}H\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}} \rightarrow \boxed{H = 6cm}$$

Sad nije teško naći zapreminu kupe:

$$V_k = \frac{1}{3}BH$$

$$V_k = \frac{1}{\cancel{3}}108\pi\cdot \overset{2}{\cancel{6}}$$

$$\boxed{V_k = 216\pi cm^3}$$

Zapremina lopte je:

$$V_l = \frac{4}{3}r^3\pi$$

$$V_l = \frac{4}{3}3^3\pi$$

$$V_l = \frac{4}{\cancel{3}}\cdot \overset{9}{\cancel{27}}\pi$$

$$\boxed{V_l = 36\pi cm^3}$$

a odnos zapremina:

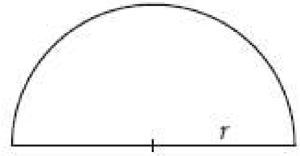
$$V_k : V_l = 216\cancel{\pi} : 36\cancel{\pi}$$

$$V_k : V_l = 6 \rightarrow \boxed{V_k = 6\cdot V_l}$$

Zapremina kupe je 6 puta veća od zapremine lopte.

292. Полукруг, чији је полупречник 18 cm, савијен је у омотач купе.
Колика је запремина купе?
Прикажи поступак.

Запремина купе је _____ cm³.



Rešenje:

Izračunajmo najpre površinu ovog polukruga. (može da se tretira i kao kružni isečak sa centralnim uglom od 180^0)

$$P_{polukruga} = \frac{P_{kruga}}{2} = \frac{r^2\pi}{2} = \frac{18^2\pi}{2} = \frac{324\pi}{2} = \boxed{162\pi cm^2}$$

E sad razmišljamo da je ovo omotač kupe!

Znači da je površina omotača: M=$162\pi cm^2$ a dužina izvodnice s=18cm (ono što je r za isečak, tj. ovaj polukrug, to je s za kupu!)

Iz omotača kupe ćemo naći dužinu poluprečnika r.

$$M = sr\pi$$
$$162\cancel{\pi} = 18r\cancel{\pi}$$
$$r = \frac{162}{18} \rightarrow \boxed{r = 9cm}$$

Primenom Pitagorine teoreme dobijamo visinu kupe:

$$r^2 + H^2 = s^2$$
$$9^2 + H^2 = 18^2$$
$$81 + H^2 = 324$$
$$H^2 = 324 - 81$$
$$H^2 = 243$$
$$H = \sqrt{243} = \sqrt{81\cdot 3} = \boxed{9\sqrt{3}cm}$$

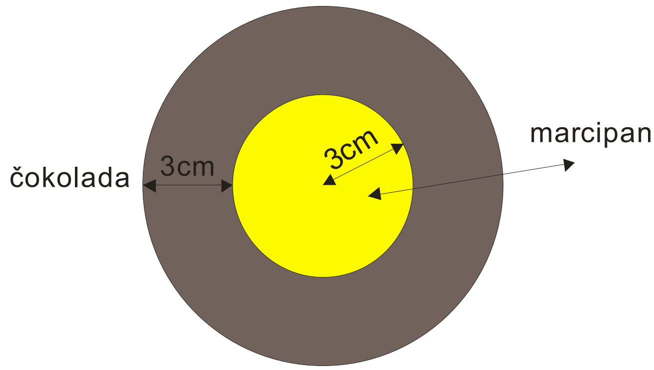
E sad nije teško naći zapreminu:

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H$$
$$V = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot 9^2\pi\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\sqrt{3}$$
$$V = 81\pi\cdot 3\sqrt{3}$$
$$\boxed{V = 243\pi\sqrt{3}cm^3}$$

Zapremina kupe je $243\pi\sqrt{3}cm^3$

293. Колач је направљен у облику кугле која има два слоја.
Унутрашњи слој је од марципана и има полупречник 3 cm, а око њега је слој чоколаде дебљине 3 cm.
Колика је запремина дела колача од чоколаде у овом колачу?
Прикажи поступак.
Запремина дела колача од чоколаде у овом колачу је ____ cm^3.

Rešenje:



presek kolača po velikom krugu

Ideja je da od zapremine cele lopte (kolača) poluprečnika 3+3 = 6 cm oduzmemo zapreminu unutrašnje lopte i na taj

način dobijemo zapreminu omotača od čokolade!

$$V = V_1 - V_2$$

$$V = \frac{4}{3}r_1^3\pi - \frac{4}{3}r_2^3\pi$$ ako izvučemo zajednički ispred zagrade, imamo

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(r_1^3 - r_2^3\right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(6^3 - 3^3\right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(216 - 27\right)$$

$$V = \frac{4}{\cancel{3}}\pi \cdot \overset{63}{\cancel{189}} \rightarrow \boxed{V = 252\pi cm^3}$$

Zapremina dela kolača od čokolade u ovom kolaču je $252\pi cm^3$ **.**

www.matematiranje.in.rs

294. Правоугли троугао, чије су катете $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, ротира око катете b. Колики је однос између површине основе и површине омотача добијене купе?

Заокружи слово испред тачног одговора.

а) 1 : 1

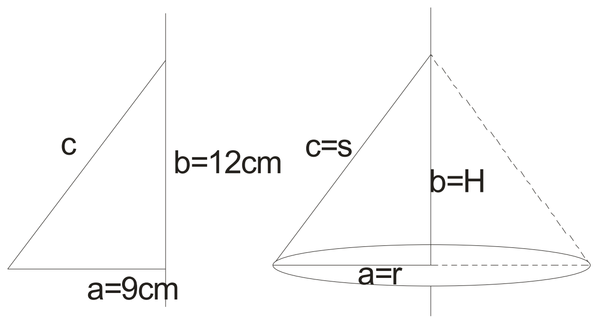
б) 3 : 4

в) 3 : 5

г) 4 : 5

Прикажи поступак.

Rešenje:



Obrtanje oko katete b

Najpre da preko Pitagore nadjemo dužinu izvodnice s.

$$r^2 + H^2 = s^2$$
$$9^2 + 12^2 = s^2$$
$$81 + 144 = s^2$$
$$s^2 = 225$$
$$s = \sqrt{225} \rightarrow \boxed{s = 15cm}$$

Sad tražimo odnos :

$$B : M = r^2 \cancel{\pi} : sr \cancel{\pi}$$
$$B : M = r \cancel{r} : s \cancel{r}$$
$$B : M = r : s$$
$$B : M = 9 : 15 \qquad \text{skratimo sa 3}$$
$$\boxed{B : M = 3 : 5}$$

Treba dakle zaokružiti odgovor pod v) 3:5

а) 1 : 1

б) 3 : 4

в) 3 : 5

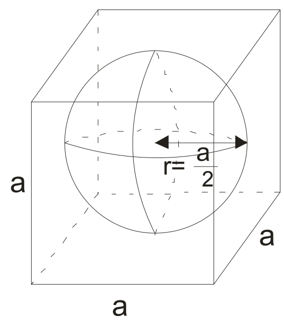
г) 4 : 5

295. Колика је површина највеће лопте која може да стане у кутију облика коцке ивице 20 cm?

Прикажи поступак.

Површина лопте је ____ cm^2.

Rešenje:



Poluprečnik lopte je onda polovina od 20 cm, to jest r = 10cm.

$$P = 4r^2\pi$$
$$P = 4 \cdot 10^2\pi$$
$$P = 4 \cdot 100\pi \rightarrow \boxed{P = 400\pi cm^2}$$

Površina lopte je $400\pi cm^2$**.**

www.matematiranje.in.rs